

Komplexe Zahlen

Trotz der Einführung der irrationalen Zahlen sind zum Potenzieren immer noch nicht alle Zahlen zugelassen. Beispielsweise entspricht die Potenz Wurzel aus -1 ($-1^{1/2}$) weder einer rationalen noch einer irrationalen Zahl. Insbesondere bei den Lösungsformeln zu kubischen Gleichungen tauchten Quadratwurzeln von negativen Zahlen auf (= Cardansche Lösungsformel).

Aber: Es gibt eben überhaupt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Das liegt daran, dass das Quadrat jeder reellen Zahl immer positiv ist.

Eine besondere Rolle bei der Einführung dieser neuen Zahlen spielt die Wurzel aus -1 . Der einfachste Versuch besteht darin, für diese Wurzel einfach ein neues Symbol zu setzen. Man nahm das i für imaginär, weil man sich erst nichts darunter vorstellen konnte, und tatsächlich konnte man mit den imaginären Größen genau so rechnen wie mit reellen ohne in Widerspruch zu geraten. Euler führte das i als imaginäre Einheit ein.

$$i = \sqrt{-1}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16 * (-1)} = \sqrt{16} * \sqrt{-1} = 4 * \sqrt{-1} = 4i$$

Die Menge aller imaginären Zahlen wird einfach dadurch erzeugt, dass man die reellen Zahlen mit i multipliziert. Wir definieren komplexe Zahlen als zusammengesetzte Zahlen. Zusammen gesetzt aus einem Realteil und einem Imaginärteil.

$$C = \{ x + iy \}$$

Wobei :

$$\text{bei } z = x + iy \quad \text{ist } x = \text{Realteil von } z = \mathbf{Re(z)}$$
$$\text{und } y = \text{Imaginärteil von } z = \mathbf{Im(z)}$$

und:

$$\bar{z} = x - iy \quad = \text{konjugiert komplex zu } z$$

Natürlich kann man keine Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl bilden, es lassen sich aber beliebige Summen von imaginären und reellen Zahlen durch Zusammenfassen auf die dargestellte Form bringen.

Rechengesetze: ($z=x+iy$; $w=u+iv$)

Addition / Subtraktion:

Bei der Addition bzw. Subtraktion werden die Realteile und die Imaginärteile getrennt addiert bzw. subtrahiert:

$$z + w = x + iy + u + iv = (x + u) + i(y + v)$$

$$z - w = x + iy - (u + iv) = (x - u) + i(y - v)$$

Multiplikation:

Bei der Multiplikation werden die komplexen Ausdrücke ausmultipliziert. Man beachte, dass aus i^2 aufgrund der vorherigen Definition -1 wird.

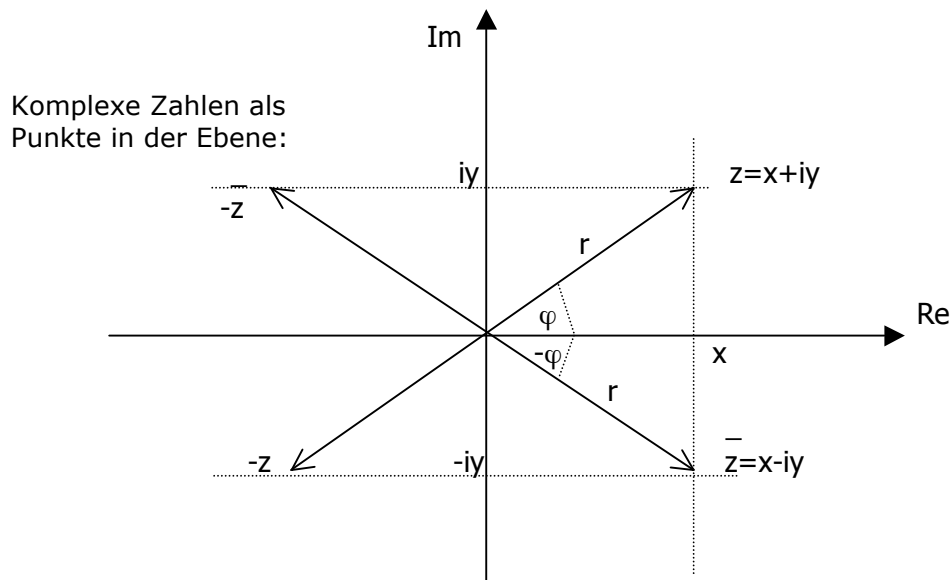
$$\begin{aligned} z * w &= (x + iy) * (u + iv) = xu + ivx + iyu + i^2yv \\ &= (xu - yv) + i(vx + yu) \end{aligned}$$

Division:

Bei der Division gilt es, den Imaginärteil durch konjugiert komplexe Erweiterung zu eliminieren. Siehe auch die Regeln zur Multiplikation.

$$\frac{z}{w} = \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu - ivx + iyu - i^2yv}{u^2 - (iv)^2} = \frac{(xu + yv)}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - vx}{u^2 + v^2}$$

Wenn die Menge der Punkte einer Geraden der Menge der reellen Zahlen zugeordnet werden kann, dann können imaginäre Zahlen nicht auch noch auf dieser Geraden liegen. Gauß erdachte eine Darstellung in einer Ebene (= Gaußebene). Es handelt sich um ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, dessen x-Achse den reellen Zahlen und dessen y-Achse den imaginären Zahlen zugeordnet wird. Die komplexen Zahlen überdecken dann die ganze Ebene.



Dabei bilden x und y die sogenannten kartesischen Koordinaten von z .

Das konjugiert komplexe z entsteht geometrisch durch Spiegelung von z an der reellen Achse, das negative konjugiert komplexe z entsteht durch Spiegelung an der imaginären Achse und das negative z entsteht durch Punktspiegelung am Koordinatenursprung.

Neben der kartesischen Darstellung können komplexe Zahlen auch durch ihre Polarkoordinaten beschrieben werden. Dabei ist φ der Winkel und r die Länge von z :

$$\varphi = \mathbf{arg\ } z \quad (\text{Argument, Winkel, Phase von } z)$$

$$r = |z| \quad (\text{Betrag, Länge von } z)$$

Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten geschieht wie folgt:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\varphi = \mathbf{arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right) \quad \text{wenn } y \geq 0$$

$$\varphi = -\mathbf{arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right) \quad \text{wenn } y < 0$$

Weitere wichtige Rechenregeln bei den komplexen Zahlen:

Konjugieren von Summen und Produkten:

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

$$\overline{z * w} = \bar{z} * \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Real- bzw. Imaginärteil errechnen:

$$\mathbf{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathbf{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Rechnen mit Beträgen:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z * w| = |z| * |w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$|z \pm w| = |z| \pm |w|$$