Hamming-Codes

Bei den sogenannten Hamming-Codes werden die zu übertragenden Bitfolgen in Codewörter übersetzt. Dabei werden jedoch nicht alle möglichen Codewörter verwendet, so dass die Verfälschung eines beliebigen Bits zu einer Bitfolge führt, die kein gültiges Codewort darstellt. Es wird dabei zwischen Fehlererkennungscodes und Fehlerkorrekturcodes unterschieden. Letztere werden auch als „Forward Error Correction (FEC)" bezeichnet.

Bei einer Übertragungsstrecke mit einer hohen Bitfehlerrate, z.B. bei der Übertragung per Funk, oder einer Übertragung mit einer hohen Laufzeit, z.B. Satellitenübertragung, ist ein Fehlererkennungscode nicht sehr effizient, da die hohe Zahl an wiederholten Übertragungen den Übertragungskanal auslasten würde. Umgekehrt wird bei einer niedrigen BER und niedriger Laufzeit, z.B. LWL, eine höhere Effizienz mit einem Fehlererkennungscode erreicht.

Normalerweise besteht ein Rahmen aus m Datenbits. Dieser wird mit r Redundanz- oder Prüfbits ergänzt. Die Einheit aus beiden hat die Länge n und wird als n-Bit-Codewort bezeichnet. Vergleicht man zwei solcher Codewörter, beispielsweise 10001001 und 10110001 kann man leicht feststellen, wie viele Bits nicht übereinstimmen. In diesem Fall sind drei Bits verschieden. Die Anzahl der Bitpositionen, in denen sich zwei Codewörter unterscheiden, wird als Hamming-Abstand bezeichnet. Haben zwei Codewörter einen Hamming-Abstand von d, müssen d Einzelfehler auftreten, um ein Wort in das andere umzuwandeln.

Zum Auffinden von d Fehlern ist also ein Codewort mit einem Hamming-Abstand von d+1 notwendig. Zum Beheben von d Fehlern benötigt man ein Codewort mit einem Abstand von 2d+1. In Kombination kann ein Code x Fehler erkennen und y Fehler korrigieren wenn sein Hamming-Abstand x+y+1 beträgt.

Ein Hamming-(n,m)-Code wandelt also ein m-bit-Datenwort in ein n-bit-Codewort um. Ohne Codierung wären also alle 2^m möglichen Kombinationen erlaubt, es könnte kein Fehler gefunden werden. Mit der Codierung werden nur 2^m von 2^n mögliche Kombinationen genutzt, d.h. wenn eine nicht erlaubte Bitkombination auftritt, erkennt der Empfänger einen Fehler.

Beispiel Hamming-(5,2)-Code:

Daten	**Codewort**
00	00000
01	00111
10	11001
11	11110

Wenn der Empfänger ein Codewort 00100 erhält, erkennt er kein gültiges Codewort, also einen Fehler. Wenn nur ein Bitfehler aufgetreten ist, kann das richtige Codewort nur 00000 sein (Hamming-Abstand gleich 1), wenn zwei Bitfehler aufgetreten sind, kann nur 00111 das richtige Codewort sein (Hamming-Abstand gleich 2), usw.

Als Regel lässt sich festhalten, dass bei einem falsch empfangenen Codewort, das von seinem Hamming-Abstand nächste Codewort als richtiges Codewort ausgewählt wird.

Bei dem Hamming-(5,2)-Code ergeben sich für fast alle der 2^5=32 möglichen Codewörter abzüglich der 2^2=4 richtigen Codewörter (also 28 falsche Codewörter) ein Hamming-Abstand von 1. Nur bei acht Kombinationen ergibt sich ein Hamming-Abstand von 2, z.B. bei 01010 oder 10100. Hier kann der Empfänger also nicht entscheiden, welches Codewort übertragen worden ist.

Mit den obigen Formeln lässt sich dies bestätigen:

Fehlererkennung:	3 = d + 1	->	d = 2
Fehlerkorrektur:	3 = 2d + 1	->	d = 1

Es können also 2 Bitfehler erkannt und 1 Bitfehler korrigiert werden.

Theoretisch könnten natürlich auch alle 5 Bits fehlerhaft sein, so dass die Fehlerkorrektur ein falsches Datenwort liefert. Es bleibt also auch mit einem Fehlercode eine positive Wahrscheinlichkeit von Übertragungsfehlern.

In der Praxis werden Hamming-Codes aufgrund ihres geringen Durchsatzes nur in Ausnahmefällen eingesetzt. Dies sind Fälle in denen der Empfänger keine Möglichkeit hat, den Sender über einen aufgetretenen Fehler zu informieren und um eine wiederholte Übertragung zu bitten